La formule d'Héron

Soient ABC un triangle quelconque, avec comme côtés a, b, et c, S le demi-périmètre du triangle ABC et K l'aire du triangle. On a :

$$K = \sqrt{(S)(S-a)(S-b)(S-c)}$$

Nous avons déjà démontré la formule d'Héron dans un autre document. Voici la démarche empruntée par Héron lui-même. C'est une démarche d'abord géométrique. Elle s'appuie sur cinq propositions.

Proposition 1 : Les bissectrices des angles d'un triangle se rencontrent en un point qui est le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

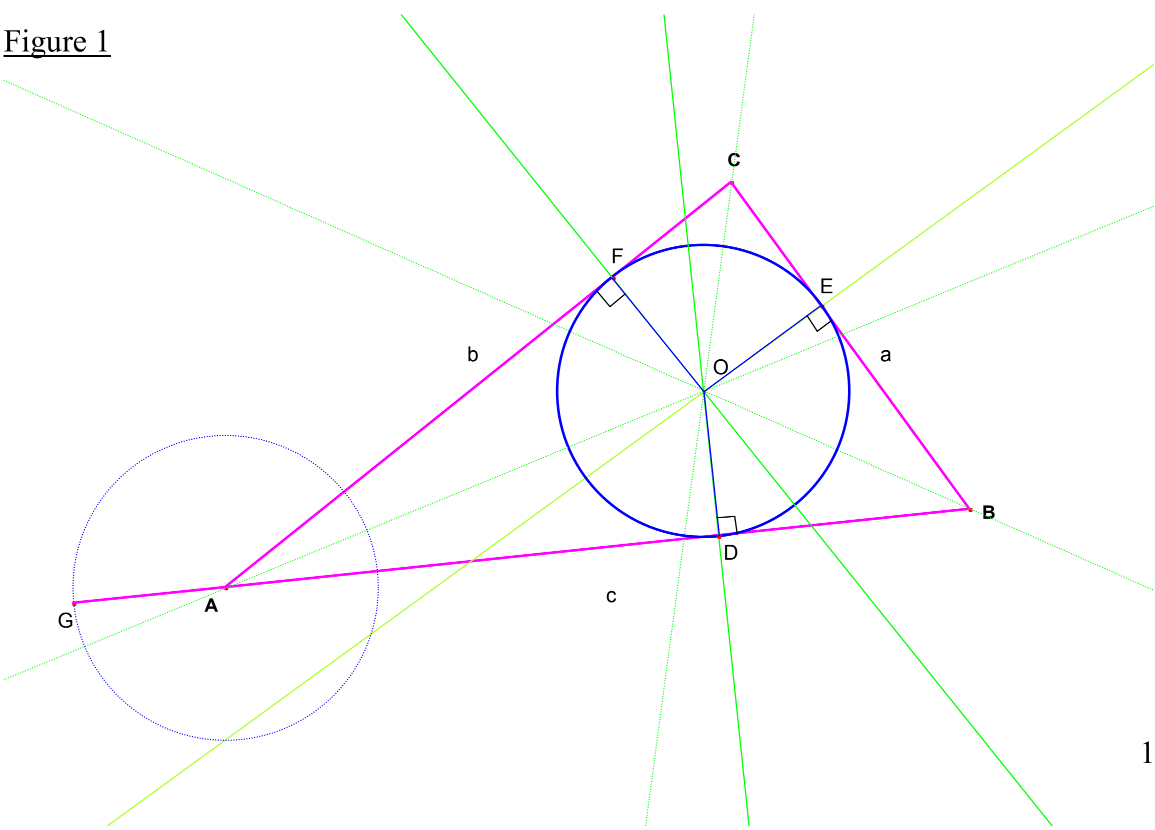
Proposition 2 : Dans un triangle rectangle, la hauteur issue de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

Proposition 3 : Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est équidistant des trois sommets.

Proposition 4 : Si $ABCD$ est un quadrilatère avec diagonales $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$, et que $\angle DBC$ et $\angle DAC$ sont droits, alors il est possible de tracer un cercle passant par A, B, C et D.

Proposition 5 : Les angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle sont supplémentaires (équivalents à deux angles droits).

Figure 1



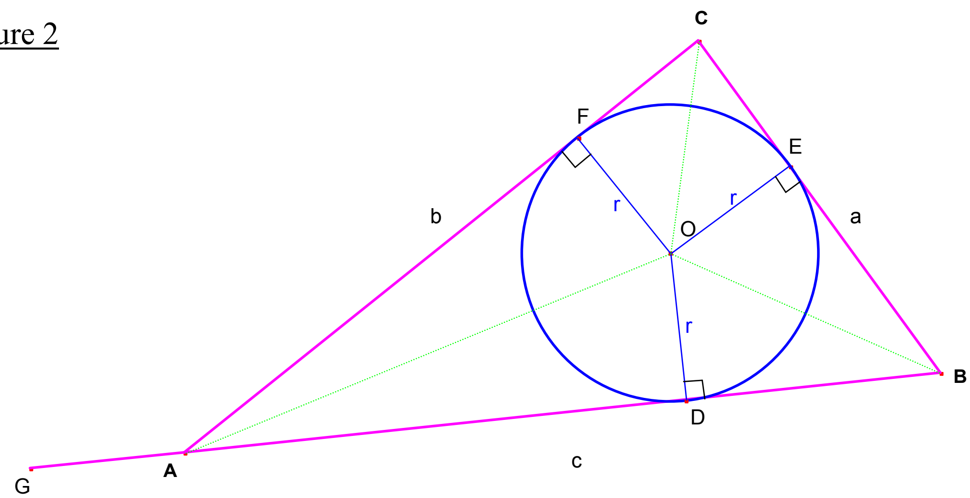
<u>Début de la preuve :</u>

Soit un triangle $\triangle ABC$ quelconque, de telle sorte que $\overline{AB}$ soit plus grand que la somme des deux autres côtés.

On construit les bissectrices d'au moins deux angles, et ces bissectrices se rencontrent en O. Par la proposition 1, on construit le cercle inscrit, de centre O, tel que montré sur la figure ci-dessus. On a donc : $m\overline{OD} = m\overline{OE} = m\overline{OF} = r$.

On allonge ensuite $\overline{AB}$ jusqu'à G de telle sorte que $\overline{AG} \cong \overline{CE}$.

<u>Figure 2</u>



Avec la formule connue de l'aire du triangle : $K = \left(\frac{1}{2}\right)bh$, on trouve :

Aire de $\triangle AOB = \left(\frac{1}{2}\right)c \cdot r$

Aire de $\triangle AOC = \left(\frac{1}{2}\right)b \cdot r$

Aire de $\triangle BOC = \left(\frac{1}{2}\right)a \cdot r$

L'aire du grand triangle $\triangle ABC$ étant égale à la somme des aires des triangles qui le composent, on obtient : $K = \left(\frac{1}{2}\right)(ar) + \left(\frac{1}{2}\right)(br) + \left(\frac{1}{2}\right)(cr)$

En factorisant r, on obtient : $K = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$

On retrouve le demi-périmètre ! $K = rs$ Étonnant !

Mais il reste encore beaucoup à faire. Le grand triangle $\triangle ABC$ a été décomposé en trois paires de triangles congrus :

$\triangle AOD \cong \triangle AOF$ $\quad\quad$ $\triangle BOD \cong \triangle BOE$ $\quad\quad$ $\triangle COE \cong \triangle COF$

On peut prouver ces congruences facilement avec le cas A-C-A.

Comme les côtés et les angles homologues de triangles congrus sont congrus, on obtient également ces résultats :

$\overline{AD} \cong \overline{AF}$	$\overline{BD} \cong \overline{BE}$	$\overline{CF} \cong \overline{CE}$
$\angle AOD \cong \angle AOF$	$\angle BOD \cong \angle BOE$	$\angle COE \cong \angle COF$

Nous allons maintenant laisser les triangles semblables et regarder le segment $\overline{BG}$.

$$\overline{BG} = \overline{BD} + \overline{DA} + \overline{AG}$$

Mais comme $\overline{AG} \cong \overline{CE}$ par construction :

$$\overline{BG} = \overline{BD} + \overline{DA} + \overline{CE}$$

En mettant $\frac{1}{2}$ en évidence : $\quad = \left(\frac{1}{2}\right)\left(2\overline{BD} + 2\overline{DA} + 2\overline{CE}\right)$

Par congruence, on trouve : $\quad = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\left(\overline{BD} + \overline{BE}\right) + \left(\overline{DA} + \overline{AF}\right) + \left(\overline{CE} + \overline{CF}\right)\right)$

En permutant : $\quad = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\overline{BD} + \overline{DA} + \overline{BE} + \overline{CE} + \overline{AF} + \overline{CF}\right)$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}\right)$$

Donc : $\quad \overline{BG} = s$

Grâce à ce dernier résultat, on peut obtenir :

$$\begin{aligned} s - c &= \overline{BG} - \overline{AB} \\ &= \overline{AG} \end{aligned}$$

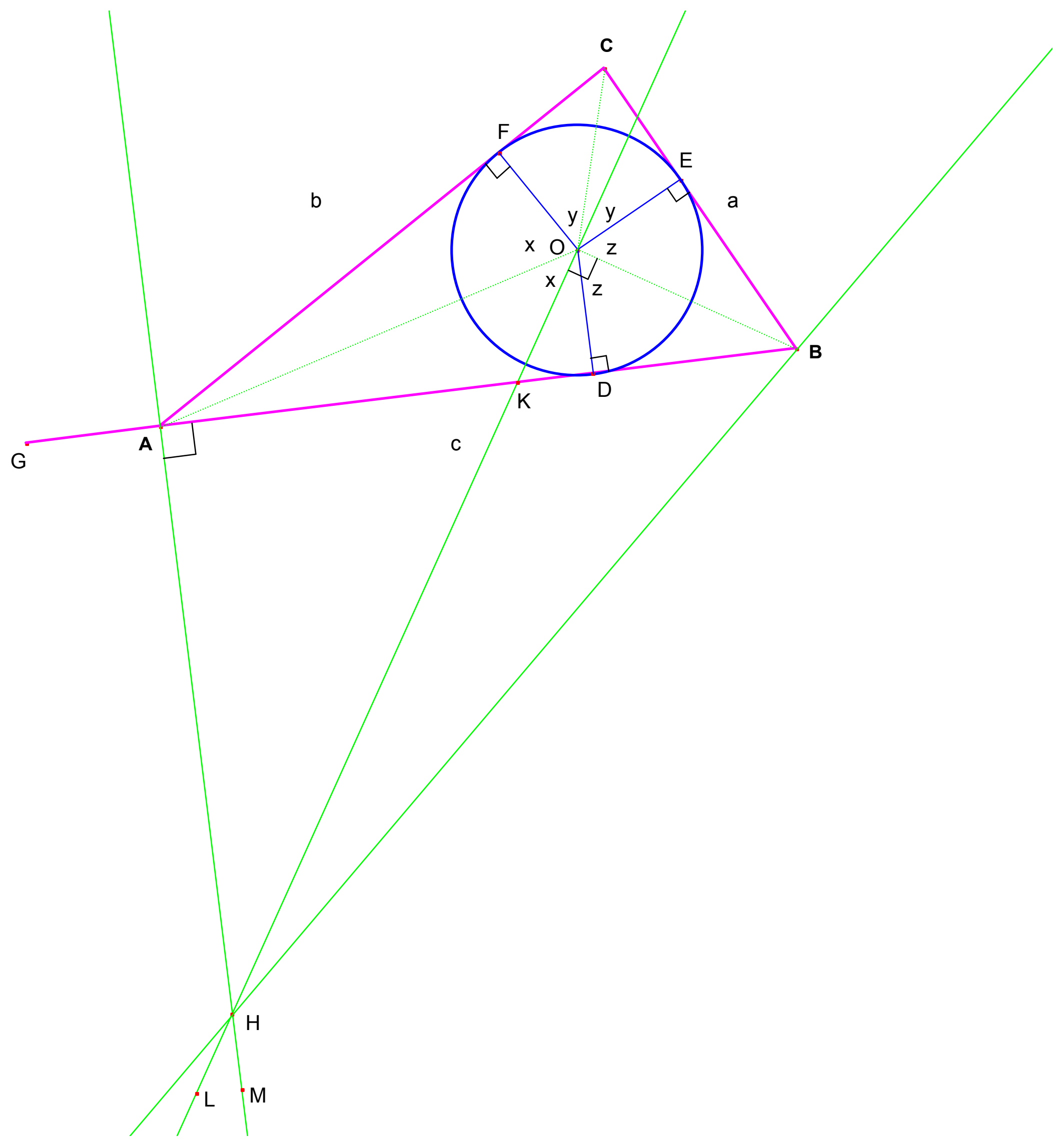
$$\begin{aligned} s - b &= \overline{BG} - \overline{AC} \\ &= \left(\overline{BD} + \overline{DA} + \overline{AG}\right) - \left(\overline{AF} + \overline{CF}\right) \\ &= \left(\overline{BD} + \overline{DA} + \overline{CE}\right) - \left(\overline{AD} + \overline{CE}\right) \\ &= \overline{BD} \end{aligned}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned} s-a &= \overline{BG}-\overline{BC} \\ &= \left(\overline{BD}+\overline{AD}+\overline{AG}\right)-\left(\overline{BE}+\overline{CE}\right) \\ &= \left(\overline{BD}+\overline{AD}+\overline{CE}\right)-\left(\overline{BD}+\overline{CE}\right) \\ &= \overline{AD} \end{aligned}$$

Nous avons donc associé le demi-périmètre s et les quantités $s-a$, $s-b$ et $s-c$ à des segments dans le plan.

Construisons maintenant $\overline{OL}$ perpendiculaire à $\overline{OB}$, coupant $\overline{AB}$ en K. Construisons $\overline{AM}$ perpendiculaire à $\overline{AB}$ et coupant $\overline{OL}$ en H. Traçons $\overline{BH}$.



Le quadrilatère $AOBH$ satisfait les conditions des propositions 4 et 5. On peut donc tirer que $\angle AHB + \angle AOB = 180°$.

En examinant le centre O on a :

$$2x + 2y + 2z = 360°$$
$$x + y + z = 180°$$

Mais comme $\angle AOB = x + z$, on a :
$$y + \angle AOB = 180°$$

Alors $\angle AHB = y$

Par ailleurs, les triangles $\triangle COF$ et $\triangle BHA$ sont semblables, par le cas de similitude A-A en utilisant le fait que $\angle AHB = y$ et que les deux triangles soient rectangles.

Comme les côtés homologues de triangles semblables sont dans le même rapport, on tire la proportion suivante :

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \dfrac{\overline{CF}}{\overline{OF}}$ et puisque $\overline{CF} = \overline{AG}$ et $\overline{OF} = r$, la proportion devient : $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \dfrac{\overline{AG}}{r}$

En intervertissant les extrêmes : $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \dfrac{\overline{AH}}{r}$

Les triangles $\triangle KAH$ et $\triangle KDO$ sont eux aussi semblables, par le même cas de similitude.

$\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AK}} = \dfrac{\overline{OD}}{\overline{KD}}$ et cette fois-ci $\overline{OD} = r$, la proportion devient : $\dfrac{\overline{AH}}{r} = \dfrac{\overline{AK}}{\overline{KD}}$

En comparant les deux équations (en comparant $\dfrac{\overline{AH}}{r}$), on obtient :
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{KD}}$$

Considérons maintenant le triangle rectangle $\triangle BOK$ et sa hauteur issue de l'angle droit $\overline{OD} = r$. Par la proposition 2, on a : $\dfrac{\overline{KD}}{r} = \dfrac{r}{\overline{BD}}$ ou simplement $r^2 = \left(\overline{KD}\right)\left(\overline{BD}\right)$.

En ajoutant 1 de chaque côté de l'équation on obtient :
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} + 1 = \frac{\overline{AK}}{\overline{KD}} + 1$$

En mettant sur dénominateurs communs : $\dfrac{\overline{AB}+\overline{AG}}{\overline{AG}} = \dfrac{\overline{AK}+\overline{KD}}{\overline{KD}}$

Plus simplement : $\dfrac{\overline{BG}}{\overline{AG}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{KD}}$

En multipliant à gauche par $\dfrac{\overline{BG}}{\overline{BG}}$ et à droite par $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BD}}$, nous obtenons :

$$\frac{\left(\overline{BG}\right)^2}{\left(\overline{AG}\right)\left(\overline{BG}\right)} = \frac{\left(\overline{AD}\right)\left(\overline{BD}\right)}{\left(\overline{KD}\right)\left(\overline{BD}\right)}$$

Or, comme $r^2 = \left(\overline{KD}\right)\left(\overline{BD}\right)$, l'équation précédente devient : $\dfrac{\overline{BG}^2}{\left(\overline{AG}\right)\left(\overline{BG}\right)} = \dfrac{\left(\overline{AD}\right)\left(\overline{BD}\right)}{r^2}$

En appliquant le produit croisé : $r^2\left(\overline{BG}\right)^2 = \left(\overline{AG}\right)\left(\overline{BG}\right)\left(\overline{AD}\right)\left(\overline{BD}\right)$

Mais les éléments à gauche de l'équation sont justement les expressions trouvées beaucoup plus tôt correspondants au demi-périmètre s et aux quantités $s-a$, $s-b$ et $s-c$.

En remplaçant : $r^2s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$

En prenant la racine carrée de chaque côté de l'équation :

$$rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Or, le premier résultat obtenu grâce au cercle inscrit était justement $K = rs$.

On a donc, finalement :

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ *CQFD*